1. **Метод Гаусса и метод разрешающего элемента.**

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы. Это так называемые *прямые методы*, в которых решение представляется в виде формул или последовательности формул, и *итерационные методы*, когда решение получают в виде сходящейся последовательности приближений.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

**** (2.1)

Введем обозначения:

А=,  и 

В силу введенных обозначений систему можно переписать в виде

. (2.2)

*Решением системы* будем называть любой набор значений неизвестных , обращающих все уравнения системы в тождества.

*Система* называется *совместной*, если она имеет решения. В противном случае систему называют *несовместной*.

Говорят, что *система однородная*, если свободные члены равны нулю, т. е. .

**Критерий совместности:** Система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы  равен рангу матрицы *А.*

Рангом системы строк (столбцов) матрицы A с m строк и n столбцов называется максимальное число линейно независимых строк (столбцов). Несколько строк (столбцов) называются линейно независимыми, если ни одна из них не выражается линейно через другие. Ранг матрицы не превосходит её минимальной размерности. Ранг матрицы — наивысший из порядков миноров этой матрицы, определитель которых отличен от нуля. Минором к Mi,j элементу ai,j определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Известно, что, если матрица *А* – квадратная и невырожденная, то есть , то она имеет решение, причем единственное, и его можно найти по правилу Крамера или, вычислив обратную матрицу, записать решение в виде . К сожалению данные методы не эффективны для систем большой размерности в виду трудоемкости вычисления определителей высокого порядка и обращения матриц.

**Метод Гаусса** называют *методом последовательного исключения неизвестных*. Он состоит из прямого и обратного ходов.

Вычисления с помощью метода Гаусса на этапе прямого хода заключаются в последовательном исключении неизвестных из системы для преобразования ее к равносильной системе с верхней треугольной (трапециевидной) матрицей. Вычисления значений неизвестных производят на этапе обратного хода.

На первом шаге в системе (2.1) надо исключить неизвестное *x*1 из уравнений с номерами *i* = 2, 3, …, *n*. Пусть элемент . Он называется ведущим элементом первого шага.

Вычтем последовательно из второго, третьего, …, *n-*го уравнений системы первое уравнение, умноженное соответственно на .

Это позволит обратить в нуль коэффициенты при *x*1 во всех уравнениях, кроме первого. В результате получим равносильную систему:

**** (2.3)

где  **,** , 

Продолжим дальше, предполагая, что  и исключим неизвестное  из уравнений, начиная с третьего и так далее. На *k*-ом шаге предполагаем, что ведущий элемент *k*-го шага , и, продолжая процесс, получаем формулы для преобразования элементов матрицы на данном шаге:



, .

Это так называемый прямой ход метода Гаусса. Если на каком-то шаге получается невыполнимое равенство, это означает, что система не имеет решений. В противном случае после *(n-1)-*го шага исключений можем получить треугольную систему, из последнего уравнения которой мы найдем . Подставляя его в предпоследнее, уравнение найдем . И так далее. Этот процесс называется обратным ходом метода Гаусса.

Возможно также ситуация, когда в процессе прямого хода получается трапециевидная система, где в последнем оставшемся уравнении имеется более одной переменной. В этом случае придаем всем оставшимся в последнем уравнении неизвестным, кроме первого, произвольные значения , затем из последнего уравнения выражается через  оставшееся неизвестное и подставляется в предыдущие уравнения. Постепенно все неизвестные выражаются через параметры , которые могут иметь произвольные числовые значения. Таким образом, в последнем случае система имеет бесконечно много решений.

**Метод ведущего (разрешающего) элемента**

Метод ведущего элемента представляет собой модификацию метода Гаусса.

Рассмотрим систему уравнений (2.1) с одинаковым числом *n* неизвестных и уравнений:

****

Выбираем в матрице *А* любой не равный нулю элемент , который называют *ведущим элементом*. Строка и столбец, в котором находится этот элемент, называют *рабочими*. То есть рабочими будут *l*-й столбец и *k*-ая строка. Исключаем неизвестное  из всех уравнений, кроме *k-*го. В матрице новой системы *l-й* столбец принимает вид:



После исключения неизвестного  система принимает вид:



где  (кроме *i=k*), т. е. коэффициенты пересчитываются по формулам:

, .

Опять ищем ведущий элемент и исключаем соответствующую переменную. Так продолжаем до тех пор, пока не получится уравнение с одним неизвестным. Из этого уравнения находим значение неизвестного и подставляем его в предыдущие уравнения для обратного хода. Продолжаем процесс, пока не получим значения всех неизвестных.

# Пример. Пусть



Выберем ведущим элементом . Пересчитываем коэффициенты.

Находим:

, , ;

, , ;

, .

Получаем:



Выбираем ведущим элементом  и получаем:



Откуда 

1. **Метод прогонки.**

Метод прогонки является модификацией метода Гаусса для систем специального вида, так называемых трехдиагональных систем. Трехдиагональной системой называют систему линейных уравнений с матрицей вида:

,

т. е. матрицей, у которой ненулевыми могут быть только элементы, стоящие на главной и двух смежных с главной диагоналях.

Рассмотрим трехдиагональную систему:

****

Суть метода прогонки заключается в построении рекуррентной последовательности для нахождения прогоночных коэффициентов Ai и Bi. При этом каждое неизвестное представляется в виде

.

Выражаем неизвестное  из 1-го уравнения:

.

То есть на первом шаге прогоночные коэффициенты имеют вид:

 ,  , причем .

Далее выражаем x2 из второго уравнения:



т. е. прогоночные коэффициенты имеют вид

, , причем .

Продолжаем процесс и находим



для .

В итоге получаем

.

Для нахождения  используем данное уравнение и оставшееся последнее уравнение. Получаем систему



решая которую, находим



Для удобства положим, что ,  и тогда формулы для прогоночных коэффициентов принимают следующий вид:

 .

Тогда



Проводя обратный ход метода прогонки, последовательно найдем значения неизвестных .

Замечание: Очевидно, чтобы наши действия в выводе метода прогонки были корректны, необходимо чтобы в формулах для вычислении прогоночных коэффициентов знаменатели дробей не обращались в нуль. Можно показать, что метод прогонки будет корректным, если для его коэффициентов выполняется условие преобладания диагональных элементов, т. е. выполняется соотношение:

, ,

в котором хотя бы одно из неравенств строгое.

1. **Метод квадратного корня.**

Этот метод применяется при решении систем вида  с симметрической матрицей. Если матрица *А* не является симметрической, то без предварительного преобразования системы к виду  метод применять нельзя.

Схема метода квадратного корня строится на идее представления матрицы в виде произведения треугольных и диагональных матриц, а именно: находим такую правую треугольную матрицу *S* и диагональную матрицу *D* с элементами ±1 по главной диагонали, чтобы имело место равенство



где приняты обозначения

, .

Предположим, что мы нашли такие матрицы *S* и *D*, для которых имеет место равенство .

Тогда решение системы



осуществляется по такому правилу.

Введем следующие обозначения:

  ,

где *В −* известная матрица; *−* неизвестный вектор.

Для определения вектора ** в силу формул



имеем такую систему линейных алгебраических уравнений:

.

Здесь особенно важно то, что матрица этой системы является левой треугольной, т. е. имеет вид

.

Это позволяет сразу из системы



выписать ее решение, выполняя только обратный ход метода Гаусса сверху вниз. В результате, определив вектор  по формулам



находим затем из системы  искомое решение системы 

Для этого нам надо будет в системе



выполнить обратный ход метода Гаусса снизу вверх, после чего получим



Теперь, чтобы придать схеме метода окончательный вид, надо указать правило, по которому следует вычислять элементы матриц *S* и *D.* Мы будем располагать уравнениями следующего вида:



Чтобы разложение  было однозначным, определим диагональные элементы *sii* так, чтобы они были положительны. Тогда из второго уравнения системы при *i=1* имеем 

Положим *d11= sign а11* и из предыдущего уравнения для *s11*получим

.

Из первого уравнения системы при *i=1* найдем

.

Таким образом, мы сможем определить элементы первой строки матрицы *S*.

Далее, аналогично, из второго уравнения системы и из первого уравнения при *i=2* находим:

.

Эти формулы позволяют вычислить элементы второй строки матрицы *S*. Продолжая этот процесс, мы сможем вычислить все элементы матрицы *S*. Укажем в общем виде формулы, по которым должны вестись вычисления элементов: (2.4)

Таким образом, при решении системы  по методу квадратного корня необходимо:

1) сначала убедиться в том, что *A* − симметрическая матрица, и затем вычислить элементы матрицы *S;*

2) используя формулы

, вычислить вектор ;

3) наконец, по формулам



найти искомое решение исходной системы − вектор .

Если матрица *А —* симметрическая положительно определенная, то ее можно разложить в произведение двух транспонированных друг другу треугольных матриц, а именно:

**

где *S* — правая треугольная. В этом случае формулы (2.4) несколько упростятся и будут иметь вид



Отметим в заключение, что метод квадратного корня очень эффективен при решении систем с положительно определенной симметрической матрицей. Симметричность проверяется простым сравнением соответствующих элементов. Положительная определенность матрицы определяется с помощью критерия Сильвестра.

Критерий Сильвестра. Для того чтобы матрица была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы были строго положительны.

**Вычисление определителей**

Для упрощения процесса вычисления определителей пользуются формулами, так называемой схемы единственного деления.

*Схема единственного деления* состоит в следующем.

Пусть необходимо вычислить определитель

,

причем .

Выносим элемент из первой строки и получим

.

Вычитая из каждой строки, начиная со второй, первую строку, умноженную соответственно на , получим

,

где  и, соответственно, , .

С образовавшимся определителем (*n-1*)-го порядка поступаем таким же образом, если . В противном случае перенумеруем и поменяем местами строки или столбцы определителя

Продолжая процесс, мы получим, что искомый определитель равен произведению ведущих элементов:

.

**Обращение матриц**

Часто возникает необходимость обратить квадратную матрицу

*A*=.

# Поскольку вычисление матрицы *А-1* обычным способом достаточно трудоемко, поступаем следующим образом. Построим прямоугольную матрицу:

,

которая получается, если к *A* приписать справа единичную матрицу *Е*.

Применим к этой матрице метод исключения Гаусса, не заботясь о правых столбцах. Когда гауссово исключение закончится, получим:



Если матрица *А*  не вырождена, то матрица

*В*=

будет обратной к *A.*

1. **Матричная прогрессия и ее сходимость.**

смотри 6 вопрос

1. **Индуцированная матричная норма.**

Рассмотрим векторное пространство . Пусть

 − вектор данного пространства.

*Нормой вектора*называется функция  от вектора , для которой выполняются следующие аксиомы:

(Н1): ,   ,

(Н2): , , ,

(Н3): , .

Пример:

 - кубическая норма;

 − евклидова норма;

 - октаэдрическая норма.

Векторное пространство вместе с заданной в нем нормой называется *нормированным векторным пространством*.

Рассмотрим квадратную матрицу .

*Нормой матрицы* *А*, индуцированной нормой вектора , называется число

.

Из этого определения непосредственно следует, что для любой индуцированной нормы справедливы следующие свойства

1) , где *Е* – единичная матрица;

2) , где *О* – нулевая матрица;

3) ;

4) ,

то есть

.

Легко видеть, что для индуцированной нормы матрицы выполняются соотношения:

(Н1'): ;

(Н2'): ;

(Н3'): ;

(Н4'): .

*Нормой матрицы*называется функция ||*A*|| от матрицы *А* , для которой выполняются аксиомы (Н1') - (Н4').

Таким образом, индуцированные матричные нормы представляют собой частный случай матричных норм. Из аксиомы (Н4') очевидно следует, что



Найдем матричную норму , индуцированную векторной нормой 1:



Таким образом .

Докажем, что . Для этого необходимо показать, что .

По определению

 для любого .

Предположим, что в  максимум достигается при *i=i0,* то есть .

Построим вектор  такой, что . Тогда . Следовательно:



То есть, действительно, .

Совершенно аналогично можно показать, что:

.

1. **Индуцированная евклидова матричная норма.**

*Спектральным радиусом* матрицы *А* называется число

μ(А) = max { |λ1|, …., |λn| },

где λ1, …., λn - собственные значения данной матрицы.

**Лемма 1.** Для любой матричной нормы μ(*А*) ||*A*||.

Доказательство. Действительно, пусть λ собственное значение матрицы *А* и μ(*А*) = |λ|. Построим матрицу *В* того же порядка, что и *А*, у которой первый столбец совпадает с собственным вектором  матрицы *А*, соответствующим собственному значению λ, а остальные столбцы нулевые. Тогда очевидно *АВ= λВ*. Используя аксиомы из определения матричной нормы, получим

|λ| ||*В*||  ||*A*|| ||*В*||,

и поскольку *ВО*, и , следовательно, ||*В*|| 0, получаем |λ||  ||*A*||.

По аналогии с векторами в  можно определить сходимость последовательности матриц поэлементно, считая, что *A(k)  A* при *k * тогда и только тогда, когда *aij(k)  aij* для всех *i,j=1, …, n.*

**Лемма 2.** Для того чтобы *AkО* при *k* ** необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы *А* были по модулю меньше единицы.

Доказательство. Докажем леммы для случая симметричной матрицы *А*. Из линейной алгебры известно, что в этом случае

*А = Т-1ΛT,*

где *Λ* диагональная матрица с действительными собственными значениями

λ1 , λ2 ,…., λ n

на главной диагонали. Соответственно,

*Аk = Т-1Λk T,*

где на главной диагонали диагональной матрицы *Λk* стоят элементы

λ1k , λ2k ,…., λ nk .

Следовательно, если все собственные значения λ1 , λ2 ,…., λ n по модулю меньше единицы, то все элементы матрицы *Аk* стремятся к нулю при *k* , т.е. *Аk.*

**Лемма 3.** Для того чтобы ряд *E + A + A2 +…..+ Ak + …* сходился необходимо и достаточно, все собственные значения матрицы *А* были по абсолютной величине меньше единицы. В этом случае матрица *Е-А* имеет обратную и

*E + A + A2 +…..+ Ak +* …= (*Е-А)-1.*

Доказательство. 1) Пусть матричный ряд сходится. Тогда в силу необходимого признака сходимости числового ряда каждый элемент матрицы *Ak* стремится к нулю при *k* **, следовательно *Ak* *О* при *k * . В силу леммы 2 последнее равносильно тому, что все собственные значения матрицы *А* по модулю меньше единицы.

2) Пусть все собственные значения матрицы *А* по модулю меньше единицы. Отметим сразу, что матрица *(Е – А)*  невырождена поскольку ее определитель |*Е – А*| = |*А* *–* *Е* | не может обращаться в 0 (иначе среди собственных значений матрицы А было бы и число 1). Рассмотрим тождество

*(E + A + A2 +…..+ Ak) (Е – А) = Е* – *Аk+1,*

откуда следует

(*E + A + A2 +…..+ Ak*) = (*Е – А*)-1 – *Аk+1*(*Е – А* )-1 .

Согласно лемме 2 *Ak* *О* при *k* *.* Следовательно

(*E + A + A2 +…..+ Ak*) **(*Е – А*)-1 при *k,*

т.е. ряд сходится.

Покажем теперь, что норма ||*A*||, индуцированная евклидовой нормой вектора, совпадает с  , где λ - наибольшее собственное значение матрицы *А\*А*, (*А\** - матрица, полученная из *А* транспонированием).

Прежде всего убедимся, что λ0. Действительно, поскольку

(*А\*А)\* = А\*(А\*)\*=А\*А,*

то матрица *А\*А* симметрическая. Кроме того,

(*А*, *А*) = (, *А\*А*) 0

для любого вектора . То есть *А\*А*  - симметрическая неотрицательно определенная матрица. Как известно из курса линейной алгебры все собственные значения такой матрицы действительны и неотрицательны. Более того, существует ортонормированный базис из собственных векторов  данной матрицы, соответствующих ее собственным значениям

λ1  λ 2 ……. λn .

Рассмотрим произвольный вектор  единичной евклидовой нормы и разложим его по базису :

= *α1* + … + *αn*.

Тогда

 = (,) = *α12 +* …..+ *αn2=* 1

и, следовательно,

|*|А*||22 = (*А*, *А*) = (, *А\*А*) =  =

=   λ1 = λ1.

Отсюда

||*A*||  .

В итоге, действительно матричная норма, индуцированная евклидовой векторной нормой, имеет вид:

||*A*|| = .

Такая норма матрицы *А* называется спектральной.

В частном случае, когда матрица *А* симметрическая, *А\*А =А2* и поскольку собственные значения этой матрицы совпадают с квадратами

λ12, λ22 ,……., λn2 собственных значений матрицы *А*, то спектральная норма матрицы совпадает с наибольшим по абсолютной величине собственным значением матрицы *А*, то есть равна спектральному радиусу матрицы *А*

||*A*||= μ(*А*).

Спектральная норма матрицы неудобна в практическом плане из-за трудности ее вычисления. Поэтому наряду с нормами ||*A*||1 и ||*A*||3 , индуцированными кубической и октаэдрической векторными нормами, мы будем пользоваться евклидовой нормой матрицы

.

Эта норма является *согласованной* *с* евклидовой *векторной нормой* в том смысле, что для нее и евклидовой векторной нормы всегда выполняется соотношение

|*|А*||  ||*A*|| ||||.

1. **Спектральный радиус матрицы.**

смотри 6-ой вопрос

1. **Критерий сходимости матричной последовательности.**

смотри 6-ой вопрос

1. **Метод простых итераций. Достаточное условие сходимости и оценка скорости сходимости.**

Рассмотрим систему линейных уравнений в векторном виде:

 (3.1)

Преобразуем ее:

. (3.2)

Существует много других способов представить систему (3.1) в виде (3.2). Так, если матрица *А* имеет ненулевые диагональные элементы, то *i*-тое уравнение делят на элементы , чтобы получить единичный коэффициент перед *xi*. Затем в *i*-ом уравнении в левой части оставляют *xi*, а все остальные слагаемые переносят в правую часть. Получаем систему , где

, .

Пусть теперь система записана в виде (3.2). Выбираем произвольным образом  − начальное приближение (обычно берется вектор ) и подставляем в правую часть системы. Получим:

 − *1*-е приближение.

Повторяя процесс *k* раз, получаем *k*-е приближение

, (3.3)

и так далее.

Таким образом, получается рекуррентная последовательность , которую будем также называть итерационной последовательностью. Если последовательность  сходится к некоторому вектору , то очевидно  является решением системы (3.2). Процесс нахождения последовательности  будем называть методом простых итераций.

**Теорема 1**. Для того, чтобы при любом начальном приближении  итерационная последовательность в методе простых итераций сходилась к решению системы (3.2) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы *В* были по абсолютной величине меньше единицы.

Доказательство. 1) Пусть все собственные значения матрицы *В* по модулю меньше единицы. Тогда в силу лемм 2 и 3

*Вk O и Е + В + В2 + ……+ Вk  (E −B)-*1 при *k*.

Но



откуда следует, что



2) Пусть теперь при любом начальном приближении  существует предел



Тогда



Вычитая из этого равенства равенство (3.3), получим



Перейдем к пределу в равенстве

.

Так как вектор  может быть любым, а  то это означает, что

 , а последнее по лемме 2 равносильно тому, что все собственные значения матрицы *В* по модулю меньше единицы.

Доказанная теорема дает **критерий сходимости** метода простых итераций. Ее недостаток в трудности проверки полученного критерия, связанного с вычислением спектра матрицы. Поэтому чаще применяются **достаточные условия сходимости**, проверка которых требует знания только самих элементов матрицы.

**Теорема 2.** Пусть . Тогда система (3.2) имеет решение, причем единственное, и последовательность приближений  сходится к этому решению со скоростью геометрической прогрессии (при любом начальном приближении ).

Доказательство: 1) Существование и единственность.

Предположим, что есть решение  для системы (2). Значит . Тогда , откуда получаем оценку

. (3.4)

2) Сходимость.

Пусть  − решение системы (3.2). Рассмотрим равенства:



.

Из них следует:

.

Обозначим . Тогда

.

Отсюда следует, что , где , и значит что

.

Положив , и можно записать

, следовательно .

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Метод простых итераций сходится, если выполнено хотя бы одно из условий:

1),

2) ,

3) .

Отметим, что условия 1) − 3) независимы друг от друга.

Оценим погрешность метода на каждой итерации:

.

Поскольку ,

можно записать 

и, следовательно,

.

Вычтем из каждой части равенства , получим

.

Отсюда

,

и далее

.

Так как,  то, умножая обе части предыдущего неравенства на  и учитывая оценку

, получим

.

Таким образом, справедливо следующее

**Следствие 2.** Погрешность *k*-го приближения в методе простых итераций оценивается неравенством

.

1. **Метод Зейделя. Критерий сходимости.**

Рассмотрим модификацию метода итераций, называемую *методом Зейделя.* Пусть дана система линейных уравнений



Каким-либо способом приведем систему к виду (3.2): . Перепишем систему покоординатно:

 .

Если бы применялся метод простых итераций, итерационная последовательность выглядела бы следующим образом

.

Идея метода Зейделя заключается в том, чтобы использовать уже найденные координаты для улучшения значения последующих и проводить вычисления по правилу

. (3.5)

Можно ожидать, что метод Зейделя будет сходиться быстрее метода простых итераций. Исследуем условия его сходимости. Матрицу *B* разобьем на сумму матриц *H* и *F,* где

 , .

Тогда алгоритм метода Зейделя можно переписать в виде

.

или

.

Поскольку матрица *(Е – Н)*  не вырождена, то последнее выражение можно записать как

 (3.6)

**Теорема 3**. Для того чтобы метод Зейделя сходился при любом начальном приближении  необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения

*| F + λ H − λE |* = 0

были по абсолютной величине меньше единицы.

Доказательство. В силу теоремы 1 для сходимости последовательности (6), а значит и метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы , то есть корни уравнения

*|*  *− λE |=*0

были по модулю меньше единицы. Даже вычисление коэффициентов этого уравнения представляет собой трудную задачу. Поэтому найдем более простое уравнение, корни которого совпадают с корнями данного уравнения. Действительно, поскольку определитель *| E − H |* равен единице, то

*|*  *− λE |=| (E− H)*[**] *|=*

= *|* *|| F −(E−H) λE |= | F + λ H − λE |.*

И так сходимость метода Зейделя сводится к определению абсолютной величины корней уравнения *| F + λ H − λE |* = 0.

Уже непосредственное сравнение этого уравнения с характеристическим уравнением *|В− λE|* = 0 матрицы показывает, что области сходимости метода Зейделя и метода простых итераций, вообще говоря, должны быть различны.

Действительно, для случая матрицы



уравнение

*|В−λE|* = *λ2 −0,25=0*

имеет корни λ1= *−0,5,* λ2= *0,5,*  следовательно, метод простых итераций сходится. Метод Зейделя для той же матрицы *В* сходиться не будет так как у уравнения

*| F + λ H − λE |= λ2 +6 λ −6,25=0*

один из корней по модулю больше единицы.

1. **Метод Зейделя. Достаточные условия сходимости.**

Теорема 3 (смотри вопрос 10) неудобна для практического применения. По аналогии с методом простых итераций можно построить **достаточные условия сходимости** метода Зейделя.

**Лемма 4.** Если диагональные элементы матрицы *С* доминируют по строкам или по столбцам, т.е. если



или

,

то определитель матрицы *С* отличен от нуля.

Доказательство. Докажем лемму для случая доминирования диагональных элементов по строкам. Для доказательства утверждения достаточно показать, что однородная линейная система



имеет только нулевое решение. Предположим противное, т.е. допустим, что система имеет отличное от нулевого решение . Среди координат вектора  выберем максимальную по модулю . Положим  в системе  и рассмотрим значение левой части *i*-го уравнения однородной системы:

|| 

 |||| *−* |*сij||x\*j* | ||(|*cii*| *−*) > 0 ,

так как || > 0 и .

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы.

**Теорема 4**. Для того, чтобы метод Зейделя сходился, достаточно выполнения одного из следующих условий:

1)  ,

2) .

Доказательство. Пусть выполнено первое условие. В силу теоремы 3 достаточно показать, что в этом случае любое число λ\* такое, что | λ\* |  1 , не может быть корнем уравнения *| F+λH−λE|* = 0. Действительно, рассматривая сумму абсолютных величин недиагональных элементов любой строки определителя

*| F + λ H − λE |* ,

можно записать:

| *λ\* ||bi1| + ….+ | λ\* ||bii-1|+|bij+1|+ ….+ |bin*| 

 | *λ\* |=*| *λ\* |*( *−*|*bii|*)*<*| *λ\*|*(1 −|*bii|*) =

*=*| *λ\*|−*| *λ\* |*|*bii|*| *λ\*|−*|*bii|*| *λ\*−bii|=*| *bii− λ\* |.*

Полученные неравенства

| *λ\* ||bi1| + ….+ | λ\* ||bii-1|+|bij+1|+ ….+ |bin*| <| *bii− λ\* | *

представляют собой как раз условие доминирования диагональных элементов матрицы *F + λ\*H − λ\*E.*

Тогда по лемме 4 определитель |*F+λ\*H−λ\*E*| отличен от нуля и, следовательно, все корни уравнения

|*F + λ\* H − λ\*E*| = 0

по модулю меньше единицы. Тогда в силу теоремы 3 метод Зейделя сходится.

1. **Решение частичной проблемы собственных значений.**

Задачу вычисления всех собственных значений и векторов матриц принято называть полной проблемой собственных значений. Иногда требуется найти два самых больших по абсолютной величине собственных значений или собственные значения ближайшие к некоторому заданному числу. Такие задачи называют частичными проблемами собственных значений.

Из линейной алгебры известно, что собственные значения матрицы А являются корнями λ1 , λ2 ,…, λn характеристического уравнения

| А - λЕ| = . (4.1)

Характеристический многочлен будет равен раскрытому определителю (4.1)

Собственные векторы , отвечающие собственному значению λ , представляют собой ненулевые решения системы

. (4.2)

Таким образом, раскрывая определитель |А - λЕ| и решая характеристическое уравнение (1), можно найти все собственные значения. Подставляя их последовательно в систему (2), находим собственные векторы, отвечающие данным собственным значениям. 

Применяемые методы решения проблемы собственных значений делятся на прямые и итерационные. Прямые методы позволяют найти коэффициенты характеристического уравнения и затем вычислить корни этого уравнения. Прямые методы отличаются простотой и высоким быстродействием. В то же время их недостатком является чувствительность к ошибкам округления результатов промежуточных вычислений в случае высокой размерности матриц. В итерационных методах коэффициенты характеристического уравнения не вычисляются, но строятся итерационные последовательности для нахождения собственных значений. Итерационные методы более трудоемки, однако менее чувствительны к ошибкам округлений и более надежны.

**Решение частичной проблемы собственных значений**

Рассмотрим для простоты случай, когда все собственные значения матрицы *А* действительны. Найдем максимальное по абсолютной величине собственное значение. Для простоты будем предполагать, что

|λ1|> |λ2| ….. |λn|

и, что существует базис из собственных векторов.

Выберем произвольный вектор  такой, что

,

и построим последовательность .

Тогда

.

Отсюда следует, что

,



Положим 

.

Тогда из последних соотношений получаем (при условии, что с1 отлично от нуля):

. (4.3)

Из (3) непосредственно следует, что  при . Кроме того,



то есть,

 при .

Мысль, что, зная наибольшее собственное значение и соответствующий собственный вектор, мы можем вычитать его на каждом шаге, и, тем самым, дать возможность проявиться второму по модулю собственному значению, очевидна.

Чтобы тем же методом найти наименьшее (в алгебраическом смысле) собственное значение, достаточно следующего простого наблюдения. Пусть — собственный вектор, т. е. *A* = λ. Тогда

(*А - рЕ) = (λ - p)* .

Если уже известна примерная величина наибольшего собственного значения, то можно взять р равным этой величине, и самое маленькое собственное значение станет самым большим (по модулю).

1. **Метод Данилевского.**

Метод Данилевского относится к прямым методам. Известно, что матрицы *S-1AS*, полученные преобразованием подобия из *A*, имеют тот же характеристический многочлен, что и *А*. Известно так же, что любая матрица приводима преобразованием подобия к так называемой канонической форме Фробениуса

F=,

в первой строке которой стоят коэффициенты характеристического многочлена, взятые с обратным знаком. Таким образом, основная задача сводится к нахождению матрицы *S* такой, что *F= S-1AS*.

Предположим, что элемент *ann-1* матрицы *А* отличен от нуля. Разделим *(n-1)*-й столбец этой матрицы на *ann-1*и вычтем его из *i–*гостолбца, умноженного на *ani* (для всех *i=1,2,…,n*). Тогда последняя строка примет такой же вид как в матрице *F*. Непосредственно проверяется, что проделанная операция равносильна умножению *А* справа на матрицу

*Мn-1*=  .

Непосредственно проверяется также, что *Мn-1*не вырождена и, следовательно, существует

*M-1n-1*= .

Таким образом,

*M-1n-1АМn-1=А(1)=* .

Предположим далее, что элемент *a(1)n-1n-2* тоже отличен от нуля. Делаем второй шаг метода, полностью аналогичный предыдущему, и приводим вторую снизу строку матрицы к виду необходимому для формы Фробениуса (сохраняя последнюю строку без изменений). Получаем

*M-1n-2 M-1n-1АМn-1Мn-2= M-1n-2 А(1) Мn-2 =*

= *А(2*)=,

где

*Мn-2*=,

*M-1n-2*= .

Таким образом, если имеет место так называемый регулярный случай, когда



то после (n-1) шагов метода Данилевского получим следующий результат

*А(n-1)= M-11… M-1n-1АМn-1…М1=*

= ==*F=S-1 AS*.

В таком случае мы можем непосредственно выписать характеристическое уравнение

*λn + p1λn-1 +*….. + *pn* =0

и, решая его, найти собственные значения λ1, λ2, ……, λn .

Для нахождения собственных векторов в регулярном случае решаем систему (4.2).

Отдельно рассмотрим **нерегулярный случай** метода Данилевского. Пусть выполнено *(n-k)* шагов метода и оказалось, что в матрице *А(n-k)* элемент . Тогда, если левее этого элемента в строке есть отличные от нуля элементы (например в столбце с номером *j*), то поменяем местами *j*-й и (*k*-*1*)-й столбцы и продолжим процесс. Заметим, что операция замены местами столбцов равносильна умножению матрицы *А(n-k)* слева и справа на матрицу *T*, которая строиться из единичной матрицы *Е* заменой четырех ее элементов. Именно:

*tjj =tk-1k-1=0, tjk-1=tk-1j=1,*

остальные элементы матрицы *T* совпадают с соответствующими элементами матрицы *Е*. Таким образом, в цепочке преобразований матрицы на данном шаге добавится дополнительная операция

*T А(n-k)T,*

после которой процесс пойдет, как и раньше.

Если левее элемента  в строке матрицы *А(n-k)* не оказалось ненулевых элементов, то матрица *А(n-k)* очевидно имеет вид

*А(n-k*)= ,

где B(n-k)=,

## F(n-k)=.

Тогда

*| A(n-k) - λE| = |B(n-k) - λEk-1| |F(n-k) - λEn-k+1|*

и, следовательно, поскольку *F(n-k)* является матрицей Фробениуса, ее характеристический многочлен можно выписать непосредственно, а к матрице *B(n-k)* применить снова метод Данилевского. Таким образом, вычислительный процесс даже упрощается.

1. **Метод вращений Якоби.**

Из линейной алгебрыизвестно, что всякая симметрическая матрица *А* может быть приведена к диагональному виду ортогональным преобразованием подобия

*V-1 AV = Λ,*

где Λ – диагональная матрица. При этом для ортогональной матрицы  *V* справедливо условие *V-1=V\*,* т.е. ортогональное преобразование подобия можно записать в виде

*V\* AV = Λ.* (4.4)

Метод Якоби использует итерационный процесс, который приводит исходную симметрическую матрицу *А* к диагональному виду с помощью после­довательности *элементарных ортогональных преобразований* (в дальнейшем называемых *вращениями Якоби* или *плоскими вращениями).*  На *(k+1)-*ом шаге осуществляется преобразование

*А(k) →A(k+1) =V(k)\* A(k)V(k) = V(k)\* …V(0)\* A(0) V(0)… V(k)*, *k=0,1,2…,* (4.5)

где *А(0)= A, V(k) = V(k)ij (φ)* — ортогональная матрица, отличающаяся от единичной матрицы только элементами

*vii*= *vjj* = *cos φ vij =* - *vji = -sin φ* , (4.6)

значение *φ* выбирается при этом таким образом, чтобы обратить в 0 наибольший по модулю недиагональный элемент матрицы *А(k) .*  Итерационный процесс постепенно приводит к матрице со значениями недиагональных элементов, которыми можно пренебречь, т.е. матрица *А(k)*  все более похожа на диагональную, а диагональная матрица *Λ* является пределом последовательности *А(k)*  при *k* → ∞.

Основное достоинство метода Якоби заключается в том, что при выполнении каждого плоского вращения уменьшается сумма квадратов недиагональных эле­ментов.

Отметим, что, если разложение (4.4) найдено, то легко указать правило нахождения собственных векторов. Действительно, если λi  - *i*-й диагональный элемент матрицы *Λ* , тогда координаты собственного вектора матрицы А соответствующего собственному значению λi совпадают с элементами *i*-го столбца матрицы *V.*

Теперь остается указать способ выбора матрицы *V(k) = V(k)ij (φ)* на *k*-ом шаге и доказать сходимость метода.

Найдем в *А(k)* максимальный по модулю недиагональный элемент . Поскольку матрица симметрическая, то можно считать, что *i<j.* Найдем значение угла поворота *φ= φk* из условия равенства нулю элемента  матрицы

*А(k+1)* = *V(k)\* A(k)V(k)*.

Положим *B= A(k)V(k).* Тогда в виду определения матрицы поворота

*V(k) = V(k)ij (φ)* элементы всех столбцов матрицы В, кроме *i*-го и *j*-го, совпадают с элементами матрицы *А(k).* Для элементов *i*-го и *j*-го столбцов имеем

 (4.7)

## Аналогично матрица *А(k+1) = V(k)\*B* во всех строках, кроме *i*-ой и *j*-ой , имеет те же элементы, что и В. Элементы *i*-ой и *j*-ой строк имеют вид

 (4.8)

Обратим внимание, что матрицы *А(k+1)* и *А(k)*  различаются только сумма



С учетом равенства  из формул (4.7) и (4.8) получим

 (4.9)

Полагая в (9) =0 , получим



или

(4.10)  
где





Обозначим через *t(A*) сумму квадратов всех недиагональных элементов матрицы *А*. Тогда

 (4.11)

Таким образом, значение функции *t(A)* уменьшается на каждом шаге.

Покажем, что итерационный процесс в методе Якоби сходится. Действительно, в силу выбора элемента  справедлива оценка

,

откуда

.

С учетом этого неравенства из формулы (4.11) получаем



где



Очевидно, что *0<q<1* при порядке матрицы *n*>2. Таким образом, получаем

 .

Последнее означает, что



и, следовательно, итерационный процесс сходится.

В итоге получаем следующий алгоритм метода вращений:

1) в матрице *А(k) (k=0,1,2,….)* среди всех недиагональных элементов выбираем максимальный по абсолютной величине элемент, стоящий выше главной диагонали; определяем его номера *i* и *j* строки и столбца, в которых он стоит ( если максимальных элементов несколько, можно взять любой из них);

2) по формулам (4.10) вычисляем  и  , далее используя формулы (4.7) и (4.8) находим элементы матрицы *А(k+1)* ;

3) итерационный процесс останавливаем, когда в пределах принятой точности величиной *t(А(k+1))* можно пренебречь;

4) в качестве собственных значений матрицы *А* берем диагональные элементы матрицы *А(k+1),* в качестве собственных векторов – соответствующие столбцы матрицы

*V= V(0)V(1)… V(k).*

1. **Принцип сжимающих отображений.**

*Метрическим пространством* называется множество *Х* элементов *х,у,…* произвольной природы, на котором определена так называемая функция расстояния или метрика , т. е. функция, для которой выполнены следующие аксиомы:

1)  , причем ;

2) ;

3)  для всех *x, y, z.*

Очевидно, если *Х* – нормированное пространство с нормой , то можно принять .

Обычно элементы метрического пространства называются точками этого пространства. Введем некоторые определения.

Последовательност*ь*  в метрическом пространстве называется сходящейся к ** , если *.* Сходимость последовательностик ** обозначается **

*Окрестностью* точки х0 в пространстве Х называется множество*:*

.

*Предельной точкой* множества *М*называется такая точка, в любой окрестности которой находится бесконечно много элементов из множества *М.*

*Замыканием множества*  называется объединение множества *М* с множеством всех его предельных точек.

*Множество замкнуто*, если , т. е. когда оно совпадает со своим замыканием.

Пусть в метрическом пространстве *Х* дана последовательность . Эту последовательность будем называть *фундаментальной*, если для любого числа  существует число *n0=n0(**)* такое, что  при любых *n,m>n0*. Легко видеть, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Метрическое пространство называется *полным* (ПМП), если в нем любая фундаментальная последовательность сходится. Примерами ПМП являются пространства *R, Rn*.

Очевидно, любое замкнутое подмножество из ПМП в свою очередь тоже является ПМП. Действительно, так как метрика сохраняется и подмножество замкнуто, то любая фундаментальная последовательность сходиться в нем.

**Принцип сжимающих отображений.**

Пусть *Х* – метрическое пространство. Рассмотрим отображение  пространства *Х* в себя. Образ элемента *х* при отображении *А* обозначается:



Отображение *А* называется *сжимающим*, если существует такое число  (0<1), что

,

иными словами расстояние между образами точек меньше, чем расстояние между самими точками.

Убедимся, что всякое сжимающее отображение непрерывно.

Действительно, по определению отображение *А* является непрерывным, если для любой сходящейся последовательности  выполняется . Пусть , т. е.  при .

Тогда , откуда получаем , что означает  или . Последнее равносильно непрерывности отображения *А*.

Точку *х* будем называть *неподвижной точкой*  отображения *А,* если *х= Ах*.

**Теорема 1.**  В ПМП любое сжимающее отображение имеет неподвижную точку, причем единственную.

Доказательство. Пусть *х0* произвольная точка:  Построим последовательность  такую, что и докажем, что она фундаментальная (а значит сходящаяся). Оценим расстояние







Решая неравенство

,

найдем *n0=n0(**)*, начиная с которого выполняется данное неравенство и, следовательно, неравенство . Последнее означает, что последовательность  – фундаментальная. Поскольку *X* – ПМП, то данная последовательность сходится, т. е. .

Убедимся, что *х* – неподвижная точка отображения *A*. Действительно, переходя к пределу в равенстве  и используя непрерывность отображения *A*, получим .

Методом от противного докажем, что неподвижная точка единственная.

Действительно, пусть есть две неподвижные точки. Тогда:



В силу того, что отображение *А* сжимающее, получим:



Откуда  Т. е. точки *x* и *y* совпадают. Теорема доказана.

**Следствие.** Теорема дает возможность вычислить неподвижную точку *х* данного отображения при любом начальном приближении . При этом оценка погрешности на n-ом шаге .

Эта оценка получается, если перейти в неравенстве



к пределу при 

1. **Приложение принципа сжимающих отображений к решению задачи Коши.**

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения:



Будем предполагать, что *f(x,y)* – непрерывна по *(x,y)* и липшицева по *у*, т. е.

,

где  − двумерная область, содержащая точку .

Пусть  − замкнутая ограниченная область, лежащая в  и содержащая точку . Тогда  ограничена в , т.е.  для всех .

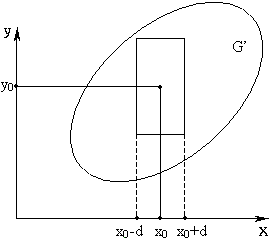


Рис. 5.3.

Выберем число d так, что для прямоугольника



выполняются условия  и .

Рассматриваемая задача Коши равносильна интегральному уравнению:



Построим отображение  и положим 

где .

Покажем, что отображение *А* – сжимающее в пространстве непрерывных на данном отрезке функций , которые дополнительно удовлетворяют условию .

Другими словами докажем, что отображение *A*:

1) не выводит за пределы пространства , ;

2)является сжимающим отображением.

Действительно  – расстояние в .

Если *ϕ* непрерывная функция, то *Аϕ* – тоже непрерывная функция и для 



т. е. действительно .

Пусть теперь . Тогда



где *Md<1*.

Таким образом, действительно отображение *А* – сжимающее. Следовательно, в силу принципа сжимающих отображений при сделанных предположениях существует единственное решение интегрального уравнения,



а значит и задачи Коши.

1. **Проблема отделения корней.**

Пусть дано уравнение *f(x)* = 0. Ставится задача: найти решение данного уравнения с точностью до некоторой заданной величины ε. Точное решение данного уравнения будем обозначать через , а приближенное через .

Методы решения уравнений делятся на прямые и итерационные.

Прямые методы – это методы позволяющие вычислить решение по формуле.

Итерационные методы − это методы, в которых задается некоторое начальное приближение и строится сходящаяся последовательность приближений к точному решению, причем каждое последующее приближение вычисляется c использованием предыдущих:

.

Очевидно, что прямые методы могут быть использованы только для решения простейших уравнений (так уже для многочлена 5-ой степени не существует общих формул для вычисления корней).

Одним из простейших методов решения нелинейных уравнений является использование теоремы Больцано-Коши. Известно, что, если функция  непрерывна на отрезке  и  то на отрезке существует хотя бы один корень уравнения (см. рис. 6.1).

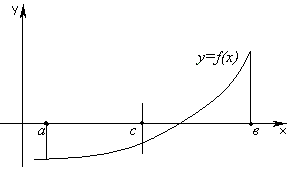


Рис. 6.1

Методом дихотомии (делением отрезка пополам) можно выделить промежуток половинной длины, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Продолжая процесс можно найти корень с любой заданной точностью.

Очевидным недостатком этого метода является его трудоемкость. Другой менее очевидный однако более существенный недостаток иллюстрируется рисунком 6.2.

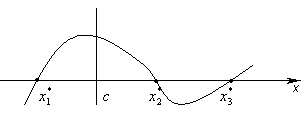


Рис.6.2

Если на отрезке есть несколько корней данного уравнения (см. рис. 6.2), при делении отрезка пополам будет найден только один корень и произойдет потеря других. Чтобы избежать этого, нужно предварительно провести процедуру отделение корней.

Другим простейшим методом решения нелинейных уравнений является использование принципа сжимающих отображений.

Пусть функция  непрерывно дифференцируема на отрезке  и на концах его принимает значения разных знаков. По уравнению  строим уравнение , где . Множитель λ выбираем таким образом, чтобы на отрезке были выполнены условия φ:  и

||<*q<1* на . После этого строим итерационную последовательность

,

которая сходится к искомому решению уравнения.

**Проблема отделения корней**

Поставим задачу: найти интервал *(a,b),* на котором для заданной функции *f(х)* выполняется условие и который содержит *только один* корень функции *f(х)*.

Если функция на заданном интервале непрерывно дифференцируема, то алгоритм решения задачи в данном случае будет следующий:

1)Находим производную.

2) Решаем уравнение *= 0* для нахождения стационарных точек.

3) Разбиваем исходный интервал *(a,b)* на меньшие интервалы с помощью найденных стационарных точек.

4) Из полученных интервалов выбираем только те, на концах которых *f(x)* принимает значения разных знаков.

5)Уточняем интервалы за счет их сужения.

Очевидным недостатком метода является трудность нахождения стационарных точек (зачастую это более трудная задача, чем решение заданного уравнения). К достоинствам метода можно отнести его принципиальную простоту и то обстоятельство, что часто других более хороших способов нет.

Для отделения корней можно также воспользоваться графиком функции.

К достоинствам подобного способа можно отнести его наглядность и простоту, к недостаткам низкую точность и необходимость строить график функции.

Полезным средством для отделения корней является также использование теоремы Штурма.

Пусть *f(x)* – многочлен, и уравнение *f(x)=0* не имеет кратных корней, т.е. нет точек, в которых  и  (стационарные точки не являются корнями).

Построим так называемый ряд Штурма: *f0(x) , f1(x) , … , fn(x)*, где



*f2(x)* – остаток от деления , взятый с обратным знаком,

*fk(x)* − остаток от деления , взятый с обратным знаком,

и так далее, пока не получим постоянную.

Обозначим через *N(a)* – число перемен знаков в ряде Штурма, при *x=a;* через  *N(b)* – число перемен знаков в ряде Штурма, при *x=b.*

**Теорема Штурма.** При сделанных выше предположениях, число корней уравнения *f(x) = 0* на отрезке *[a, b]*  равно *N(a) - N(b).*

1. **Метод хорд.**

Пусть дано уравнение , , где  − дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть выполняется условие  и проведено отделение корней, то есть на данном интервале *(a, b)* находится один корень уравнения. Пусть функция *f* выпукла на интервале *(a, b)* (см. рис. 6.3).

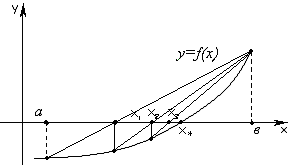


Рис. 6.3

Заменим график функции хордой (прямой), проходящей через точки

 и .

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, можно записать в виде . В нашем случае получим: .

Найдем точку пересечения хорды с осью Oх.

Полагая , получаем из предыдущего уравнения:

.

Теперь возьмем интервал *(x1,b)* в качестве исходного и повторим вышеописанную процедуру (см. рис. 6.3). Получим

.

Продолжим процесс. Каждое последующее приближение вычисляется по рекуррентной формуле

 , (6.2)

.

Если же функция вогнута (см. рис. 6.4),

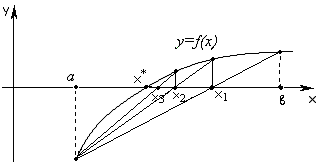


Рис. 6.4

уравнение прямой соединяющей точки  и  запишем в виде

.

Найдем точку пересечения хорды с осью Oх:

.

Теперь возьмем интервал *(a,x1)* в качестве исходного и найдем точки пересечения хорды, соединяющей точки *(a, f(a))* и *(x1, f(x1)),* с осью абсцисс(см. рис. 6.4). Получим

.

Повторяя данную процедуру, получаем рекуррентную формулу:

 (6.3)

 .

Описанный выше метод построения рекуррентных последовательностей (6.2) и (6.3) называется методом хорд. В случае ** для построения рекуррентной последовательности применяются формулы (6.2), а в случае, когда  , применяют формулы (6.3).

1. **Сходимость метода хорд.**

Докажем сходимость метода хорд.

Очевидно обе последовательности (6.2) и (6.3) могут быть записаны в виде

,

где *= а* или *= b.*

Построим функцию ,

где  или  (в зависимости от характера выпуклости). Тогда метод хорд дает рекуррентную последовательность, определяемую единой формулой

  . (6.4)

Покажем, что  будет сжимающим отображением в случае достаточно малого интервала *(a, b).* Приведем выражение для  к общему знаменателю:



Найдем производную:



и вычислим значение этой производной в точке , учитывая, что :



По формуле Тейлора

,

где  некоторая точка, лежащая между  и . С учетом данного выражения получим:

.

Оценим полученное выражение для производной :

 ,

где .

Откуда, учитывая полученную ранее оценку (6.1)

,

имеем

.

Таким образом, для сходимости итерационной последовательности (6.4) требуется выполнение условия

 или .

Очевидно, при значении  достаточно близком к точке  последнее неравенство всегда выполняется и, следовательно, в некоторой окрестности  точки  выполнено условие ||<1 и, следовательно, отображение *φ*  является сжимающим.

Остается показать, что . Действительно, для любого *x* из этой окрестности справедливо

|| = | | 

 | | + ||  *q* || < *δ,*

где точка ζ лежит в окрестности . Последнее неравенство означает, что .

Таким образом, в силу принципа сжимающих отображений, метод хорд сходится, когда начальное приближение достаточно близко к решению.

1. **Метод Ньютона (метод касательных).**

Пусть дано уравнение , , где  − дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Если выполняется условие , то на данном интервале содержится корень уравнения. Предположим, что корень отделен, т.е. на данном интервале он только один.

Рассмотрим рис. 6.5.

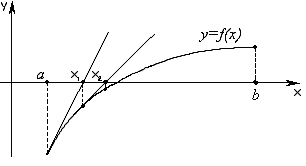


Рис. 6.5

Пусть

.

Запишем уравнения касательной в точке :

.

Найдем точку ее пересечения с осью *Ox*. Получаем

.

Построив касательную в точке , находим точку ее пересечения с осью *Ox*:

.

Продолжая процесс, получим

 .

Для рисунка 6.5 характерно условие: , так как вторая производная и сама функция отрицательны.

Рассмотрим ситуацию с  (см. рис. 6.6).

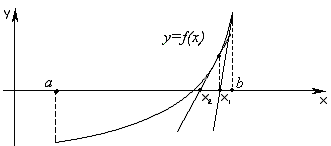


Рис. 5.6

Здесь  и .

Построив касательную в точке , находим точку ее пересечения с осью *Ox*:

 , т. е. .

Продолжая процесс получаем ту же рекуррентную формулу

,

но с начальным условием .

Таким образом, рекуррентная последовательность Ньютона задается единой формулой

,

где  (при ) или  (при ).

1. **Сходимость метода Ньютона.**

Исследуем сходимость метода Ньютона:

 ,

 или *b.*

Причем  при  и  при *.*

Очевидно

,

где  − некоторая точка между точками *а* и *b*.

Получаем

,

откуда

,

,

или окончательно

.

Отсюда

,

где

, .

Таким образом, получаем следующую оценку скорости сходимости:

.

Из полученной оценки можно получить

,

где , и далее



, ……. .

Т.е. итерационная последовательность будет заведомо сходиться, если , т. е. если  выбрано достаточно близко к .

К некоторым недостаткам метода относится необходимость выбора хорошего начального приближения.

1. **Комбинированный метод хорд и касательных.**

Пусть для определенности . См. рис. 6.7.

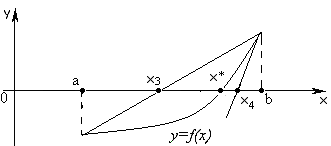


Рис. 6.7.

Тогда, применяя метод хорд при , получим



Применяя метод Ньютона при , получим

.

При этом .

Продолжая процесс далее, получаем



причем .

Отсюда

, .

, ,

причем всегда .

Пусть теперь  (смотри рис. 6.8).

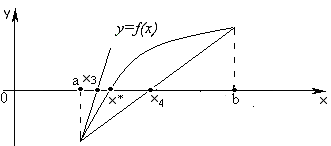


Рис. 6.8.

Применяем метод Ньютона при  и метод хорд при , и получаем



причем 

1. **Метод простых итераций.**

Пусть есть система n уравнений с n неизвестными:

 (6.5)

Запишем ее в векторном виде:

, (6.6)

где



**Метод простых итераций**

Система (4) преобразуется к виду:

,. (6.7)

где .

Пусть есть начальное приближение ,  – δ-окрестность начального приближения и пусть *ϕ -* сжимающее отображение на , т. е.

, где *q<1,*



Последнее условие заведомо выполняется, если



где



матрица частных производных , называемая также матрицей Якоби функции *φ(х).*

1. **Сходимость метода простых итераций.**

**Теорема1.** Пусть *φ* – непрерывно дифференцируемая векторная функция, для которой выполняются следующие условия:

1) ;

2) .

Тогда система (6.7) имеет решение, причем единственное, и итерационная последовательность , с начальным приближением , сходится к решению  системы (6.7) . При этом справедлива следующая оценка скорости сходимости:

.

Доказательство. Из условия (6.7) вытекает сжимаемость этого отображения. Проверим, что

.

Разложив  по формуле Тейлора, получаем для 

,

где . Тогда



т. е. .

Следовательно, мы можем применить принцип сжимающих отображений, в силу которого получаем результат теоремы. При этом из принципа сжимающих отображений следует, что

,

что равносильно оценке скорости сходимости



в нашем случае.

1. **Метод Ньютона решения нелинейных уравнений.**

Рассмотрим систему (6.6).

.

Пусть  – начальное приближение. Предположим, что в окрестности начального приближения матрица Якоби



не вырождена, т. е. .

Заменим систему (6.6) линеаризованной системой:

.

Решая данную систему относительно *х*, получим:

,

откуда

.

Заменим (6) на систему вида:

.

Отсюда:

,

и продолжая процесс, получим

.

Полученная рекуррентная последовательность называется *последовательностью Ньютона*.

1. При *n* = *1*, из нее получается обычный метод Ньютона.

Так же как и в случае *n*=*1*,можно показать, что рекуррентная последовательность Ньютона сходится, если начальное приближение выбрано достаточно близко к решению .

1. Часто метод Ньютона используется не с рекуррентной формулой Ньютона, а на каждой итерации решают систему линейных уравнений
2. .
3. **Сходимость метода Ньютона решения нелинейных уравнений.**
4. Оценим сходимость метода. Очевидно

,

где  означает, что , *M = const > 0*.

Поскольку *=0*, получим:

, т. е.

.

Таким образом, метод Ньютона имеет квадратичную сходимость.

Недостатки метода Ньютона: начальное приближение должно быть близким к решению, а матрица Якоби должна быть невырожденной.

Достоинство: быстрая сходимость.

Отметим, что выбор начального приближения является слабым местом итерационных методов.

1. **Интерполяционный многочлен.**

Из математического анализа известно, что в окрестности точки *x0*  любую *n* раз непрерывно дифференцируемую функцию можно аппроксимировать (приблизить) ее многочленом Тейлора:

,

причем







Очевидно, такая аппроксимация во многих отношениях является очень хорошей, но она имеет локальный характер, т.е. хорошо аппроксимирует функцию только вблизи точки *x0* . Это главный недостаток аппроксимации с помощью многочлена Тейлора.

Возможен и другой подход, когда в качестве аппроксимирующей функции берут многочлен или другую достаточно простую функцию, значения которых совпадают со значениями исходной функции в заданных заранее точках, так называемых узлах. Такого рода приближение функций имеет свое собственное название - интерполяция.

**Интерполяционный многочлен**

Пусть *f(x) –* функция, непрерывная на отрезке [a,b].

Выберем на этом отрезке точки, называемые *узлами интерполяции*:

** .

Предположим, что известны значения функции в узлах интерполяции:

.

Ставится задача найти многочлен *Pn(x)* такой, что

. (7.1)

Такой многочлен *Pn(x)* называется *интерполяционным многочленом*, а задача его нахождения – *задачей интерполяции.*

Покажем, что задача интерполяции имеет решение, причем единственное.

Пусть .

Тогда для определения коэффициентов многочлена из условия (7.1) получаем систему:



Ее определитель  с точностью до знака совпадает с так называемым определителем Вандермонда.

.

Поскольку все  различны, определитель Δ отличен от нуля, и, следовательно, система имеет единственное решение. Отсюда вытекает существование и единственность интерполяционного многочлена.

1. **Оценка погрешности интерполяции.**

Обозначим

 и будем искать ее оценку.

Пусть . Положим ,

где .

Зафиксируем произвольную точку *х*, отличную от узлов интерполяции , и построим вспомогательную функцию:

 . (7.2)

Очевидно , и кроме того .

Таким образом, функция *F(t)* имеет по крайней мере *(n+2)* нуля на отрезке *[a,b]*. Применим теорему Ролля, по которой между каждой парой нулей функции находится по крайней мере один нуль производной этой функции. Тогда производная  имеет по крайней мере *(n+1)* нулей на данном интервале *(a,b)*. Продолжая рассуждение, получим в итоге, что  имеет, по крайней мере, два нуля, а  − один нуль в некоторой точке ξ на *(a,b).*

Продифференцируем равенство (7.2) *(n+1)* раз и подставим *t = ξ*. Получим



Откуда .

Тогда

,

где  (очевидно формула напоминает остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа). В итоге имеем оценку погрешности интерполяции:

, где .

1. **Интерполяционный многочлен Лагранжа.**

Пусть даны узлы на отрезке *[a,b]*, , и значения функции *F(x)* в узлах

.

Пусть ,

,

т. е. .

Положим ,

т. е. .

Очевидно 

Построим многочлен .

Легко видеть, что , т. е. это интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Лагранжа.

Пример. Рассмотрим задачу интерполяции для функции

, на .

Выберем в качестве узлов точки , , . Тогда значения функции: , , .

Получим

.

Оценим погрешность. Поскольку можно показать, что , то .

1. **Линейная интерполяция.**

Пусть *n=1*, т. е. даны два узла *x0, x1* справа и слева от точки x:

.

Построим интерполяционный многочлен первой степени по этим узлам.

Значения функции *f(x)* в этих узлах *y0, y1.*

Получаем:

.

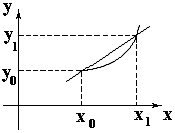


Рис. 7.1.

т. е. графически интерполяционный многочлен представляет собой хорду, соединяющую точки *(x0, y0)* и  *(x1, y1)*.

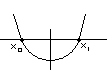
Оценим погрешность линейной интерполяции.

Пусть .

Тогда ,

так как функция  достигает максимума на  в точке .

(см. рис. 7.2).



xm

Рис.7.2.

Обозначив ,

тогда ,

т. е.  в случае линейной интерполяции.

Пример. Рассмотрим функцию

, на отрезке [0, 1] .

Пусть  − расстояние между узлами. Оценим погрешность линейной интерполяции. Получим



следовательно



1. **Интерполяционный многочлен Ньютона.**

Пусть  − набор узлов интерполирования,

 − значения функции  в узлах.

Величину  называют конечной разностью первого порядка в *к*-ом узле.

Аналогично определяются конечные разности высших порядков.



.

Конечные разности обычно считают по схеме:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | *yi* | *yi* | *yi* | *yi* |
| *x0*  *x1*  *x2*  *x3* | *y0*  *y1*  *y2*  *y3* |  |  |  |

Разделенной разностью первого порядка называется выражение

.

Разделенной разностью второго порядка называется выражение

 и т. д.

Пусть *х* – любая точка отрезка, не совпадающая с узлами. Тогда

,

откуда . (7.3)

Далее ,

откуда .

Подставляя в (7.3), получаем:

. (7.4)

Далее ,

откуда .

Подставляя в (4), имеем:

 (7.5)

Продолжая процесс, получим:

,

где .

Очевидно при ,

т. е.  − интерполяционный многочлен. Его называют интерполяционным многочленом Ньютона.

Достоинство интерполяционного многочлена Ньютона: он удобен при расширении интерполяции и добавлении узлов.

Недостаток: в какой-то степени он сложнее в подсчете конечных разностей по сравнению с многочленом Лагранжа.

1. **Интерполяционный многочлен Ньютона-Грегори.**

Рассмотрим случай задачи интерполяции с равноотстоящими узлами,

т. е. пусть

 , для всех .

Будем искать интерполяционный многочлен Ньютона в форме:

,

где коэффициенты многочлена не определены.

Используем условие

.

Получим:







Откуда ,

,

,

.

Продолжая, можем по индукции получить формулу

.

В итоге получаем интерполяционный многочлен Ньютона-Грегори:

.

Пример: Пусть требуется найти интерполяционный многочлен

для функции , имеющей в узлах , , , ,  значения , , , , . Вычислим конечные разности:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* |  |  |  |  |  |
| 0  1  2  3  4 | *5*  *3*  *2*  *4*  *6* | *-2*  *-1*  *2*  *2* | *1*  *3*  *0* | *2*  *-3* | *-5* |

Подставляя в формулу для интерполяционного многочлена Ньютона-Грегори, в итоге получаем 

1. **Аппроксимация по средне - квадратичному отклонению. Критерий линейной независимости.**

Пусть есть пространство непрерывных функций *C[a,b]* .

Введем в нем скалярное произведение и новую норму

,



 .

Система функций

 (7.6)

называется линейно-независимой, если равенство  возможно, тогда и только тогда, когда . В противном случае система функций называется линейно-зависимой.

Известно, что система попарно-ортогональных ненулевых функций всегда линейно независима. Чтобы найти критерий линейной независимости в общем случае, построим определитель, состоящий из скалярных произведений функций:

.

Определитель  называется определителем Грамма.

**Теорема 1: (Критерий линейной независимости).** Для того, чтобы система функций (7.6) была линейно независима, необходимо и достаточно, чтобы .

Доказательство: Докажем утверждение равносильное теореме, т. е. докажем, что система (7.6) линейно зависима, тогда и только тогда, когда =0.

1) Необходимость. Пусть система линейно зависима, т. е. существуют  такие, что

 , и .

Будем последовательно умножать это тождество на . Получим систему

 (2)

Это однородная система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  и ее определитель .

Поскольку система (7.7) имеет ненулевые решения, то , т. е. .

2) Достаточность. Пусть . Из этого следует, что система (7.7) имеет ненулевые решения . Подставим эти решения в систему (7.7) и получим систему тождеств. Перепишем систему в виде :



и умножим равенства последовательно на *αi,* , а затем просуммируем:

.

Последнее означает, что 

где .

Но тогда, поскольку функция g(x) непрерывна



при , т. е. система функций (7.6) линейно зависима.

Теорема доказана.

Рассмотрим функцию *f(x)* на отрезке *[a,b].* Пусть

 − линейно независимые непрерывные функции.

Построим их линейную комбинацию , называемую обобщенным многочленом по системе функций .

Ставится задача: найти такие коэффициенты  обобщенного

многочлена, чтобы выполнялось условие:

,

где минимум берется по всевозможным значениям  и

 .

Такой обобщенный многочлен называется многочленом наилучшего средне квадратичного отклонения.

1. **Существование и единственность решения задачи аппроксимации функции по средне - квадратичному отклонению.**

**Теорема 2.** Решение задачи аппроксимации функции по средне квадратичному отклонению существует и единственно.

Доказательство. Рассмотрим функцию от .





Очевидно, *Q * принимает наименьшее значение тогда и только тогда, когда  − наилучшее приближение в средне квадратичном для функции *f(x)*. Но для того, чтобы *Q* достигло минимума по , необходимо, чтобы





.

Перепишем систему в виде следующей системы, называемой нормальной системой:



Ее определитель , т. к. система функций  линейно независима. Но тогда нормальная система имеет единственное решение .

Убедимся, что , т. е. выполнены достаточные условия минимума. Очевидно

 − матрица Грамма.

Матрица положительно определена, когда положительно определена соответствующая ей квадратичная форма.

Квадратичная форма , построенная по данной матрице, называется квадратичной формой Грамма.

Но

,

причем, поскольку функции  линейно независимы, квадратичная форма равна нулю только тогда, когда все  нулевые.

Следовательно, решение нормальной системы доставляет минимум функции *Q(**)*.

Теорема доказана.

**Следствие**. Чтобы численно решить задачу построения среднеквадратичного многочлена, надо составить и решить нормальную систему, а ее решение взять в качестве коэффициентов обобщенного многочлена.

Пример. Пусть  *[0, 1].* Построим многочлен наилучшего средне квадратичного отклонения по системе линейно-независимых функций: *1, x.* Обозначим его **

Получаем:

**,

**

**.

Записываем нормальную систему:

**

решая ее, находим:

* *.

1. **Аппроксимация методом наименьших квадратов.**

Пусть дана функция  на отрезке [a, b].

Разобьем отрезок с помощью узлов

.

Пусть  − значение функции *f(x)* в узлах.

Если  − большое число, то интерполяционный  − многочлен высокой степени. Зачастую неудобно использовать многочлены очень высокой степени. Очевидно, мы можем отказаться от использования части узлов и тем самым понизить степень интерполяционного многочлена, но тогда теряется часть информации. Поэтому вместо интерполяционного многочлена будем искать многочлен *(x)* меньшей степени *(m<n)*, такой что сумма



принимает наименьшее значение. Данный многочлен называется многочленом наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.

Положим



и будем искать решение задачи



Приравнивая к нулю производные , получим систему линейных уравнений для определения коэффициентов :



.

Отсюда получается



− нормальная система для определения коэффициентов 

Когда , можно показать, что нормальная система имеет единственное решение, которое действительно дает минимальное значение для функции *S*. Получив решения нормальной системы , строим многочлен наилучшего приближения по методу наименьших квадратов.

В частном случае, когда *m=n*, многочлен *Pn(x)* переходит в интерполяционный многочлен.

Для решения нормальной системы обычно используется следующая таблица:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | *xi* |  | *………* |  | *yi* | *yi xi* | *………* | *yi* |
| 0  1  .  .  .  n | *х0*  *x1*  *.*  *.*  *.*  *xn* | *.*  *.*  *.* |  | *.*  *.*  *.* | *y0*  *y1*  *.*  *.*  *.*  *yn* | *y0 x0*  *y1 x1*  *.*  *.*  *.*  *yn xn* |  | *y0*  *y1*  *.*  *.*  *.*  *yn* |
|  |  |  | *…* |  |  |  | *…* |  |

1. **Интерполяция сплайнами.**

Рассмотрим задачу интерполяции функции *f(x)* на отрезке *[a, b].* Пусть мы имеем узлы  и значения функции  в данных узлах. Отрезок разбивается узлами на *n* элементарных отрезков , где  − длина элементарного отрезка, .

*Сплайном* называетсяфункция *S(x)*, которая на каждом элементарном отрезке является многочленом и непрерывна на всем отрезке [a, b], вместе со своими производными до некоторого порядка.

*Степенью сплайна* называется наивысший порядок степени многочлена.

*Дефектом сплайна* называется разность между его степенью и наивысшим порядком непрерывной на [a, b] производной.

Пример. Рассмотрим функцию



Очевидно, функция является кубическим сплайном на отрезке [0, 4], так как она непрерывна в узловых точках.

Действительно,

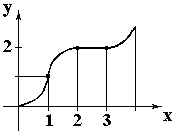


Рис. 7.3.

Найдем дефект сплайна.

В то же время  

Таким образом, наибольший порядок непрерывной производной функции  на отрезке  равен 1 и, следовательно, дефект сплайна равен 2. Смотри рисунок 7.3.

Отметим, что в общем случае сам сплайн многочленом не является. Чтобы он был многочленом, необходимо и достаточно, чтобы его дефект равнялся нулю.

Будем рассматривать кубические сплайны, у которых непрерывны первая и вторая производные.

Тогда на отрезке  сплайн *S(x)* имеет вид

, .

Очевидно , . Найдем *S(x)*. Для этого требуется определить значения *4n* неизвестных коэффициентов. Очевидно, для этого необходимо иметь *4n* уравнений для определения коэффициентов.

Подставим левый конец отрезка *(xi-1)* в уравнение:

 , 

, .

В итоге получаем *2n* уравнений:



Далее во всех внутренних узлах должны совпадать первая и вторая производные *S(x)*. Имеем

,

, .

Приравниваем во внутренних узлах значения левых и правых производных. Получим:



т. е. *(2n-2)* уравнений.

Недостающие 2 уравнения можно задать разными способами. Обычно берут .

Отсюда

, .

Для удобства положим еще .

Объединяя все уравнения, получим систему



Решая систему, получим



далее



Откуда

, .

 Таким образом, задача определения коэффициентов сплайна свелась к решению системы

, 



Система трехдиагональна. Будем решать ее методом прогонки. Поскольку для матрицы системы выполнено условие доминирования диагональных элементов

,

то задача имеет решение, причем единственное, и это решение можно найти методом прогонки

1. **Численное дифференцирование. Теорема о среднем.**

Пусть требуется найти численные значения  производной функции *f(x)* в узлах  отрезка *[a, b]*, в которых известны значения  функции. Рассмотрим несколько случаев, в зависимости от того, сколько раз дифференцируема исходная функция.

1) Всегда можно воспользоваться простейшей формулой .

2) Пусть функция *f(x)* дважды дифференцируема на отрезке *[a, b]* и узлы равноудалены друг от друга: , . Разложим *f(xk+1)* в точке *xk*  по формуле Тейлора



и получим



или 

.

При этом оценка погрешности вычислений имеет вид , где  − максимальное на отрезке *[a, b]* значение второй производной функции *f(x)*. Таким образом, точность метода *O(h)*.

**Теорема о среднем.**  Пусть *f(x)* – непрерывная функция на отрезке [a, b]. Тогда для любых точек  этого отрезка справедлива формула

, где .

Доказательство. Пусть  − минимальное и  − максимальное значения функции на заданном отрезке. Тогда справедливы неравенства вида . Просуммируем их и разделим на *n*. Получим следующую оценку:

.

Тогда в силу теоремы Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции найдется такая точка, в которой будет выполняться равенство .

Теорема доказана.

Пусть теперь функция *f(х) –* трижды непрерывно дифференцируема, а отрезок *[a, b]* разбит с шагом *h* точками , в которых функция принимает значения  соответственно. Возьмем один из внутренних узлов, например , и оценим предыдущее и последующее значения функции:

,

.

Вычитая из второго равенства первое, получим



и, используя доказанную выше теорему о среднем, можем записать

,

где  - некоторые точки отрезка *[a, b]* .

Таким образом,  или, в общем виде

, где .

При этом оценка погрешности вычисления имеет вид , т.е. точность метода имеет порядок .

Пусть теперь функция *f(x)* – четыре раза непрерывно дифференцируема. Тогда справедливы равенства



и

,

из которых следует

.

Применяя теорему о среднем и обозначая среднее арифметическое двух производных 4-го порядка в последнем равенстве через , получим

,

где  - некоторые точки отрезка *[a, b]* .

В общем виде получается

, где .

При этом погрешность будет составлять  , т.е. точность метода имеет порядок .

1. **Формула прямоугольников.**

Пусть требуется вычислить определенный интеграл , где *f(x)* – некоторая заданная на отрезке *[a,b]* непрерывная функция.

Для простоты разобьем промежуток интегрирования точками, равноудаленными друг от друга:  так, что будет выполняться равенство , где .

Рассмотрим несколько вариантов решения данной задачи.

1. Формула прямоугольников. Аппроксимируем площадь под

графиком функции *f(x)* суммой прямоугольников с основанием *h* и высотой *f(ξ)*, где . Причем, если взять , то получим формулу левых прямоугольников (см. рис.8.1):

.

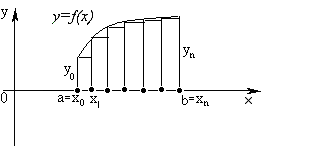


Рис. 8.1.

А если взять , то получим формулу правых прямоугольников (см. рис.8.2):

.

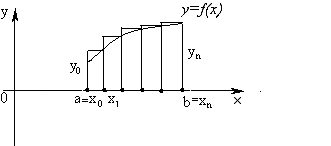


Рис. 8.2.

В случае, когда мы берем среднюю точку ,

получаем формулу средних прямоугольников (см. рис. 8.3):

, .

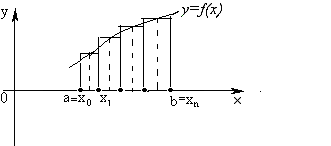


Рис. 8.3.

Оценим точность последней формулы.

Пусть, где , а подынтегральная функция − трижды непрерывно дифференцируема. Тогда

,,.

Запишем разложения функции *F* в точке  и точке : 

,

 ,

где 

Вычтем из первого равенства второе и получим: .

Используя теорему о среднем, можно записать

,

где  лежит на отрезке .

Таким образом, исходный интеграл равен .

Отсюда легко получить оценку погрешности:

, где .

Таким образом, точность формулы средних прямоугольников имеет порядок .

1. **Формула трапеций.**

Поступаем аналогично предыдущему способу, только аппроксимировать площадь под графиком функции *f(x)* будем трапециями. Площадь элементарной криволинейной трапеции приближенно равна , а интеграл

.

Можно показать, что погрешность вычислений составляет , т.е. точность метода имеет порядок .

1. **Формула Симпсона (парабол).**

Теперь аппроксимируем функцию на элементарном отрезке параболой. По сравнению с предыдущими способами вдвое уменьшим расстояние между узлами: , тогда искомый интеграл будет равен .

Найдем коэффициенты *a,b,c* параболы, аппроксимирующей  на отрезке . Для этого решим следующую систему:

 (8.1)

Так как главный определитель системы с точностью до знака совпадает с определителем Вандермонда, т.е.

,

то эта задача всегда имеет решение, причем единственное.

Посчитаем площадь параболической трапеции (см. рис. 8.4):

.

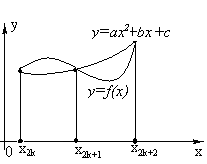


Рис. 8.4.

Возьмем для простоты начальный элементарный интервал . Площадь не изменится, если мы сдвинем криволинейную трапецию по оси *Ох* и совместим ее начало с началом координат, т.е. иными словами положим  Тогда

.

Перепишем систему (1) в виде:



и решим ее. Получим:



Тогда получается



Очевидно, аналогично



Таким образом

.

Данная формула и называется формулой Симпсона. Можно показать, что погрешность формулы Симпсона , и ее точность имеет порядок .

Таким образом, по сравнению с предыдущими методами формула Симпсона является существенно более точной.

1. **Интерполяционные квадратурные формулы.**

Вычислим интеграл , заменяя подынтегральную функцию интерполяционным многочленом с узлами , где . Получим

,

где 

и .

Формулу

 (8.2)

называют интерполяционной квадратурной формулой Лагранжа.

Заметим, что *ωk(x)* зависит только от самих узлов, на которые разбит промежуток, и не зависит от функции . Следовательно, коэффициенты *Ak* не зависят от вида функции тоже и, используя эти коэффициенты, можно считать интегралы от различных функций. При этом, если наша функция является многочленом, то формула (8.2) является точной формулой.

Можно найти *Ak* при помощи метода неопределенных коэффициентов:



Из данной системы можно найти *Ak.,* .

Пример. Построить интерполяционную квадратурную форму для вычисления интеграла



Строим систему



Решая ее, находим



Таким образом 

Недостатком интерполяционной квадратурной формулы Лагранжа является проблематичность оценки погрешности.

Наряду с интерполяционной квадратурной формулой Лагранжа для вычисления интегралов вида



часто применяется квадратурная формула Гаусса, в которой узлами разбиения служат корни многочлена

.

Формула Гаусса точнее формулы Лагранжа.

Замечания:

1. Вычисление несобственных интегралов: .

Если подынтегральная функция разрывная, то аналогично:  (*b* − точка разрыва).

1. Вычисление кратных интегралов. Пусть требуется вычислить 

по области **. Не ограничивая общности, считаем, что область  является правильной вдоль оси *Оу*, т.е. имеет вид:

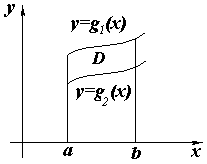


Рис. 8.5.

Тогда

,

где .

Пусть  − точки разбиения. Тогда можно вычислить каждый из интегралов

,

а потом применить формулу Симпсона к интегрированию функции .

1. **Метод ломаных Эйлера.**

Зада́ча Коши́ состоит в нахождении решения (интеграла) [дифференциального уравнения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5), удовлетворяющего так называемым [начальным условиям](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%B8_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%83%D1%81%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%8F) (начальным данным). От [краевых задач](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B0%D0%B5%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0) задача Коши отличается тем, что область, в которой должно быть определено искомое решение, здесь заранее не указывается. Тем не менее, задачу Коши можно рассматривать как одну из краевых задач.

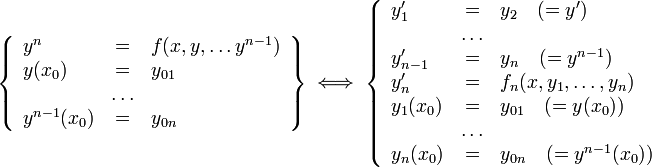
Говорят, что задача Коши имеет единственное решение, если она имеет решение *y* = *f*(*x*) и никакое другое решение не отвечает [интегральной кривой](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D1%8F), которая в сколь угодно малой выколотой окрестности точки (*x*0,*y*0) имеет [поле направлений](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%BB%D0%B5_%D0%BD%D0%B0%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B9), совпадающее с полем направлений *y* = *f*(*x*). Точка (*x*0,*y*0) задаёт начальные условия.

## Различные постановки задачи Коши

* [ОДУ](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%8B%D0%BA%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) первого порядка, разрешённое относительно производной

\left\{\begin{array}{lcl}y' &=& f(x,y) \\ y(x_0) &=& y_0\end{array}\right.

* [ОДУ](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D1%8B%D0%BA%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%B4%D0%B8%D1%84%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) *n*-го порядка, разрешённое относительно старшей производной



**Метод ломаных Эйлера**

Пусть  искомое решение задачи Коши. В точке *(x0,y0)* построим касательную (см. рис. 9.1) к графику .

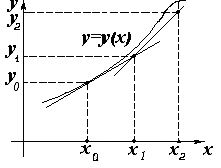


Рис. 9.1

Запишем уравнение касательной:

.

и найдем точку пересечения этой касательной с прямой : .

Запишем уравнение прямой



и найдем точку ее пересечения с прямой с :

.

Продолжая процесс, получим рекуррентную последовательность:

 (1)

,

которую называют последовательностью Эйлера. Соединяя ломаными все точки , полученные из рекуррентной последовательности Эйлера, получим ломаную линию, приближающую график решения . Функция, график которой совпадает с ломаной Эйлера, принимается за приближенное решение задачи Коши.

Выясним точность метода Эйлера. Сравним значения точного решения y(x) задачи Коши в узловых точках со значениями, полученными методом Эйлера:

,

.

Поскольку

,

то  при условии, что . То есть, точность метода на отдельном отрезке  совпадает с . Тогда, очевидно, точность метода Эйлера на всем отрезке [a, b] будет *O(h).*

Для повышения точности вычислений иногда используется модифицированный метод Эйлера, в котором рекуррентная последовательность Эйлера вычисляется по формулам

. (2)

Модифицированный метод Эйлера обычно дает более точное приближение решения.

Пример. Пусть требуется решить задачу Коши:



Полагая  и используя метод Эйлера, получим, как легко убедиться, из формулы Эйлера (1)

.

С другой стороны, используя модифицированный метод Эйлера, получим в силу формулы (2) рекуррентную последовательность

 .

Поскольку точным решением задачи Коши, как легко проверить, является функция , можно сравнить точность обоих методов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 1 | 0.8 | 0.64 | 0.572 | 0.4086 | 0.3277 |
|  | 1 | 0.82 | 0.6724 | 0.5514 | 0.4521 | 0.3708 |
|  | 1 | 0.8187 | 0.6703 | 0.5488 | 0.4493 | 0.3679 |

Общепризнанным недостатком метода Эйлера является его не достаточно высокая точность. Несомненным достоинством метода Эйлера является его простота.

1. **Метод Рунге-Кутта второго порядка.**

Метод состоит из двух этапов. Сначала находят по методу Эйлера грубое решение:

 .

На следующем шаге это грубое решение сглаживается:

.

Выясним точность метода. Преобразуя , получаем:



С другой стороны, разложим точное решение *y(x)* по формуле Тейлора. Получим



Полагая , получаем погрешность на отдельном шаге равную . Тогда на всем отрезке погрешность составит 

Достоинство метода: его точность превосходит точность метод Эйлера.

1. **Метод Рунге-Кутта четвертого порядка.**

На каждом шаге производится вычисление коэффициентов :

;

;

;

.

Затем вычисляем

.

Данный метод имеет точность  на [a,b].

Рассмотрим пример, который мы использовали для иллюстрации точности метода Эйлера.

Пример. Требуется решить задачу Коши:

 на отрезке [0, 1].

Выберем шаг . Результат вычислений поместим в таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|  | 1 | 0.8187 | 0.6703 | 0.5487 | 0.4493 | 0.3678 |
|  | 1 | 0.8187 | 0.6703 | 0.5488 | 0.4493 | 0.3679 |

Таким образом, метод Рунге-Кутта 4-го порядка отличается очень высокой точностью. К определенным его недостаткам относится большая сложность и трудоемкость (на каждом шаге необходимо четырежды вычислять значения функции *f* вместо одного раза в методе Эйлера).

Отметим, что на практике выбирают начальную длину шага *h* таким образом, чтобы  , где *ε* − заданная точность вычисления решения. Затем шаг выбирают вдвое меньшим и останавливают вычисления, если разность полученных значений *yk*  со значениями, полученными при начальном выборе шага меньше *ε*. В противном случае шаг еще раз уменьшают вдвое и т.д.

1. **Метод Адамса.**

Рассмотрим задачу Коши

|  |  |
| --- | --- |
| *y' = f(x,y) , a xb* | (1) |
| *y(a) =y0* | (2) |

В методах Рунге-Кутта значение *yk+1* зависело только от информации в предыдущей точке *xk* . Кажется вполне вероятным, что можно добиться большей точности, если использовать информацию о нескольких предыдущих точках *xk* , *xk-1* , … Именно так и поступают в многошаговых методах.

Большой и важный класс многошаговых методов возникает на основе следующего подхода. Если подставить в формулу (1) точное решение *y(x)* и проинтегрировать это уравнение на отрезке [*xk ,* *xk+1* ] , то получим

|  |  |
| --- | --- |
| *y(xk+1 )-y(xk )= http://detc.ls.urfu.ru/assets/amath0031/images/image92.gify'(x)dx= http://detc.ls.urfu.ru/assets/amath0031/images/image92.giff(x,y(x))dx  http://detc.ls.urfu.ru/assets/amath0031/images/image92.gifp(x)dx,* | (3) |

где в последнем члене предполагаем, что *p(x)* -полином, аппроксимирующий *f(x,y(x))* . Чтобы построить этот полином, предположим, что *yk* , *yk-1* , … , *yk-N* -приближения к решению в точках *xk* , *xk-1* , … , *xk-N* . Мы по-прежнему считаем, что узлы расположены равномерно с шагом *h* . Тогда *fi  f(xi , yi ) (i = k, k-1, …, k-N)* есть приближения к *f(x,y(x))* в точках *xk* , *xk-1* , … , *xk-N* , и мы в качестве *p* возьмём полином для набора данных *(xi , fi ) (i = k, k-1, …, k-N)* . Таким образом, *p* -полином степени *N* , удовлетворяющий условиям *p(xi ) = fi , (i = k, k-1, …, k-N)* . В принципе, можно проинтегрировать этот полином явно, что ведёт к следующему методу:

|  |  |
| --- | --- |
| *yk+1 =yk + http://detc.ls.urfu.ru/assets/amath0031/images/image92.gifp(x)dx* | (4) |

В простейшем случае, когда *N=0* , полином *p* есть константа, равная *fk* ,и (4) превращается в обычный метод Эйлера. Если *N=1* , то *p* есть линейная функция, проходящая через точки *(xk -1 , fk -1 )* и *(xk , fk )* ,т.е.

*p(x)= -(x-xk ) fk -1 /h + (x-xk -1 ) fk /h* .

Интегрируя этот полином от *xk* до *xk +1* , получаем следующий метод:

|  |  |
| --- | --- |
| *yk+1 =yk + h(3 fk - fk-1 )/2* | (5) |

который является двухшаговым, поскольку использует информацию в двух точках *xk* и *xk -1* . Аналогично, если *N=2* , то *p* есть квадратичный полином, интерполирующий данные *(xk -2 , fk -2 )* , *(xk -1 , fk -1 )* и *(xk , fk )* , а соответствующий метод имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
| *yk+1 =yk + h(23 fk -16 fk-1 +5fk -2 )/12* | (6) |

Если *N=3* , то интерполяционный полином является кубическим, а соответствующий метод определяется формулой:

|  |  |
| --- | --- |
| *yk+1 =yk + h(55 fk -59 fk-1 +37 fk-2 - 9 fk-3 )/24* | (7) |

Отметим, что метод (6) является трёхшаговым, а (7) -четырёхшаговым.

1. **Явная схема Адамса.**

Формулы (5)-(7) известны как **явные методы Адамса (Адамса- Башфорта)** , т.к. они для нахождения *yk+1* не требуют решения никаких уравнений. Метод (5) имеет второй порядок точности, поэтому его называют **методом второго порядка**. Аналогично, методы (6) и (7) называют соответственно методами Адамса- Башфорта третьего и четвёртого порядков.

Методы Адамса- Башфорта используют уже сосчитанные значения в точке *xk* и в предыдущих точках. В принципе, при построении интерполяционного полинома мы можем использовать и точки *xk+1* , *xk+2* и т.д. Простейший случай при этом состоит в использовании точек *xk+1* , *xk* , … , *xk-N* и построении интерполяционного полинома степени *N+1* , удовлетворяющего условиям *p(xi )= fi (I = k+1, k, …, k-N)* . При этом возникает класс методов, изветных как **неявные методы Адамса (Адамса- Моултона)** . Если *N=0* , то *p* - линейная функция, проходящая через точки *(xk , fk )* и *(xk+1 , fk+1 )* , и соответствующий метод

|  |  |
| --- | --- |
| *yk+1 =yk + h(fk+1 + fk )/2* | (8) |

является методом Адамса- Моултона второго порядка. Если *N=2*, то *p*- кубический полином, построенный по точкам *(xk+1 , fk+1 )* , *(xk , fk )*, *(xk -1 , fk -1 )* и *(xk -2 , fk -2 )*, и соответствующий метод

|  |  |
| --- | --- |
| *yk+1 =yk + h(9 fk+1 +19 fk -5 fk-1 - fk-2 )/24* | (9) |

является методом Адамса- Моултона четвёртого порядка.

Заметим теперь, что в формулах (8) и (9) значение *fk+1* неизвестно. Дело в том, что для вычисления *f(xk+1 , yk+1 )= fk+1* нужно знать значение *yk+1* , которое само пока является неизвестным. Следовательно методы Адамса- Моултона определяют *yk+1* только неявно. Так, например, соотношение (8) действительно является уравнением

|  |  |
| --- | --- |
| *yk+1 =yk + h[f(xk+1 , yk+1 ) + fk ]/2* | (10) |

относительно неизвестного значения *yk+1* . То же самое справедливо и относительно (9). В силу этого методы Адамса- Моултона называются неявными. В то же время методы Адамса- Башфорта называют явными, поскольку они для нахождения значения *yk+1* не требуют решения никаких уравнений.

1. **Метод коллокаций.**

Поскольку достаточно хороших аналитических методов нет, то используются приближенные методы.

Система дважды непрерывно дифференцируемых функций  называется *базисной системой*, если выполняется:

1)  удовлетворяет граничному условию (3)*,*

2) функции  − линейно независимы на *[a, b]* и удовлетворяют однородным граничным условиям.

По базисным функциям строят приближенное решение:

.

Задача сводится к выбору коэффициентов  таких, чтобы функция

*yn(x)* удовлетворяла граничному условию (3) и была в некотором смысле близкой к точному решению.

Поступают следующим образом. Выражение

 называют невязкой.

Легко видеть, что, если бы , то *yn(x)* было бы точным решением. К сожалению, так бывает очень редко. Следовательно, необходимо выбрать коэффициенты таким образом, чтобы невязка была в некотором смысле минимальной.

**Метод коллокаций.**

На отрезке *[a, b]* выбираются точки, которые называются точками коллокации. Точки коллокации последовательно подставляются в невязку. Считая, что невязка должна быть равна нулю в точках коллокации, в итоге получаем систему уравнений для определения коэффициентов .

 (4)

Обычно *m=n*. Получается система из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными (коэффициентами ):



Решая (4)*,* найдем приближенное решение *yn(x).* Для повышения точности расширяем базисную систему. Получаем более точное решение.

В значительной степени успех в применении метода зависит от удачного выбора базисной системы.

Пример. Пусть

,

, .

Выберем базисную систему:



Поскольку , следовательно, функции  и  линейно независимы.

Строим приближенное решение

.

Выберем точки коллокации:

.

Получаем систему уравнений



Решая ее, получим

.

1. **Метод наименьших квадратов.**

Как и в методе коллокаций приближенное решение строится по базисной системе. Для нахождения коэффициентов при базисных функциях минимизируется интеграл .

Строим систему



Решая ее, находим .

Синтезом метода наименьших квадратов и метода коллокаций

является следующий метод. Выбирают *N>n* точек и решают задачу

.

Для ее решения строится система



Пример. Рассмотрим краевую задачу





Выберем базисную систему:



Применяя метод наименьших квадратов, можно найти



1. **Метод Галеркина.**

По базисной системе строим приближенное решение

.

Рассматриваем невязку  и для определения коэффициентов при базисных функциях строим систему



Решая данную систему, находим значение .

Пример. Рассмотрим краевую задачу



.

Возьмем



Тогда, применяя метод Галеркина, получим





Сравним значения точного решения  со значениями приближенных решений  и  в отдельных точках.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xi |  |  |  |
| 0,25  0,5  0,75 | 0,044  0,07  0,06 | 0,052  0,069  0,052 | 0,044  0,062  0,06 |

Разностный метод решения краевых задач.

Рассмотрим краевую задачу

 (5)

Разобьем отрезок *[a, b]* на *n* одинаковых частей с шагом  точками:

.

Заменим



где .

Получаем для любого внутреннего узла ,  уравнение

 (6)

и для граничных узлов

.

То есть мы имеем систему из *(n+1)* уравнения с *(n+1)* неизвестными . Ее решение дает нам приближенное решение краевой задачи.

Рассмотрим частный случай линейной краевой задачи:

, (7)

.

В этом случае получаем

 (8)

.

То есть получили трехдиагональную систему линейных уравнений

,

в которой выполнено условие преобладания диагональных элементов

.

Такая система легко решается методом прогонки.

1. **Решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.**

Походу это включает в себя 3 предыдущих вопроса